

DYNAMIQUE DU POINT

Plan (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

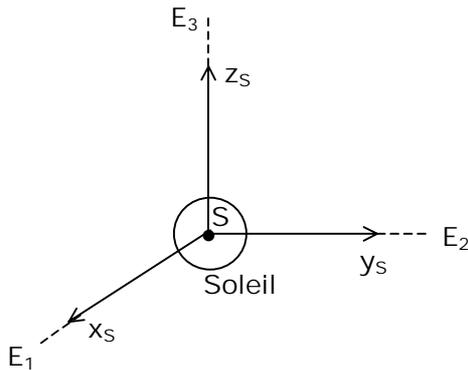
I.	Référentiel galiléen.	1
II.	Les forces.	3
III.	Relation fondamentale de la dynamique (RFD) en référentiel galiléen.	6
IV.	Principe des actions réciproques.	7
V.	Conséquences de la RFD.	7
VI.	Quelques exemples d'application :	9

I. Référentiel galiléen.

I.1. Définition : un référentiel est dit galiléen si le principe d'inertie y est satisfait.

Principe d'inertie : un système fermé isolé a une quantité de mouvement $\vec{P} = m\vec{V} = \text{cste}$ (son centre d'inertie est en TRU).

I.2. Exemple : on postule, en mécanique classique, le référentiel héliocentrique galiléen.



On l'appelle aussi référentiel de Képler (R_S). Son centre est le centre S du soleil, les 3 axes pointent vers 3 étoiles fixes (E_1, E_2, E_3).

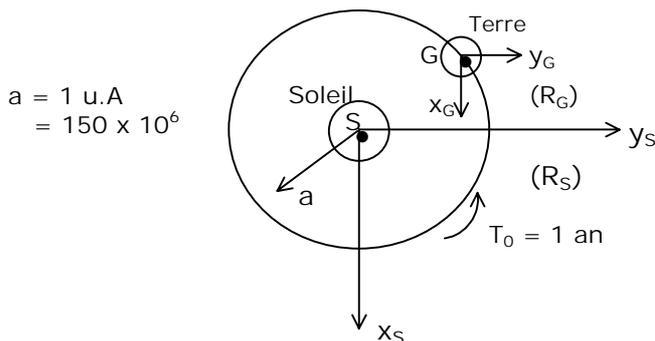
Rem. : on confond en général le référentiel de Képler, et le référentiel de Copernic, dont l'origine est au centre du Système Solaire.

I.3. Propriété : tous les référentiels galiléens sont en TRU les uns par rapport aux autres.

I.4. Référentiels « liés à la Terre ».

• La Terre décrit autour du Soleil une ellipse que l'on peut assimiler à un cercle. Soit G son centre.

On définit le référentiel géocentrique (R_G) (ou référentiel de Foucault), de centre G, en translation (circulaire uniforme) par rapport à (R_S) : il n'est donc pas galiléen.

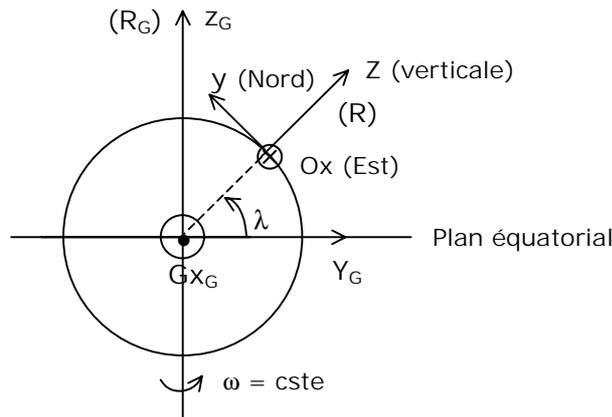


Mais :

Si $\Delta t \ll T_0 = 1 \text{ an}$: (Δt durée au phénomène étudié) l'arc GG' décrit par G pendant Δt peut être assimilé à une portion de droite, et (R_G) sera assimilé à un référentiel galiléen (ce qui revient à négliger l'action du Soleil – et de tous les autres astres – pour l'étude du mouvement d'un « point » au « voisinage » de la Terre).

- La Terre tourne autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire ω .

On peut alors définir un référentiel (R) « lié à la Terre » (tournant avec elle) :



On prend usuellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{Oz} \text{ verticale ascendante} \\ \vec{Ox} \text{ vers le Nord} \\ \vec{Ox} \text{ vers l'Est} \end{array} \right.$$

(R) est en rotation uniforme par rapport à (R_G) , donc a priori non galiléen. On pourra approximer (R) comme étant galiléen si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta t \ll 24 \text{ h} \\ V \ll \text{faible} \end{array} \right.$$

(cette dernière condition permettra de négliger la « force de Coriolis » due à rotation terrestre devant les autres forces).

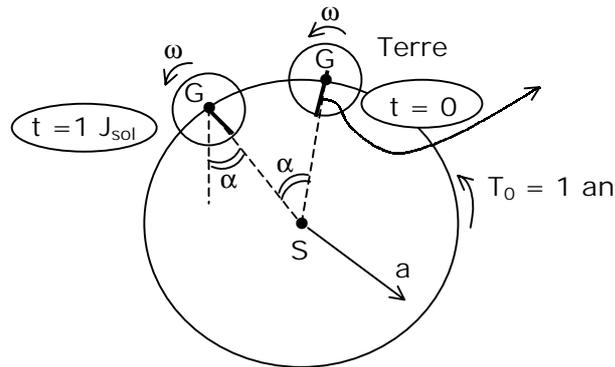
Rem. : Jour sidéral (J_{sid})/Jour solaire (J_{sol})

- ☞ Le jour solaire est l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du Soleil au même méridien d'un lieu.

$$T_0 = 1 \text{ an} = 365,25 J_{\text{sol}} ; 1 J_{\text{sol}} = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$$

- ☞ Le jour sidéral est la période de révolution de la Terre autour de l'axe des pôles :

$$J_{\text{sid}} = \frac{2\pi}{\omega} = 86164 \text{ s} \approx 23 \text{ h } 56 \text{ min}$$



(Schéma non à l'échelle !)

On voit que, pendant $1 J_{sol}$, la Terre a tourné de $2\Pi + \alpha$

Donc :

$$\frac{J_{sid}}{J_{sol}} = \frac{2\Pi}{2\Pi + \alpha}$$

Avec :

$$\alpha = \frac{2\Pi}{365,25}$$

Ainsi :

$$J_{sid} = \frac{365,25}{366,25} J_{sol} = 86164 \text{ s}$$

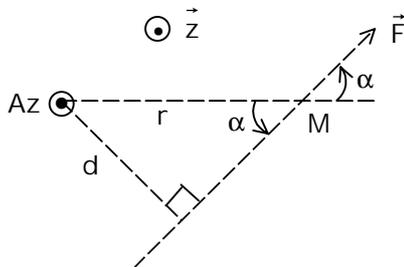
II. Les forces.

II.1. Définitions : en mécanique, l'action d'un système sur un autre est modélisée par un vecteur force \vec{F} .

Une force s'exprime en Newtons (symbole N). De manière qualitative, une force provoque un mouvement de translation d'un système matériel qui la subit.

Son moment provoquera une rotation du système : on définit le moment en un point A d'une force s'appliquant en un point M par :

$$\vec{m}_{\vec{F}}^t(A) = \vec{AM} \wedge \vec{F} \quad (\text{en Nm})$$



$$\vec{m}_{\vec{F}}^t(A) = F(rsin\alpha)\vec{z} = F d\vec{z}$$

d est appelé « bas de levier »

Le moment d'une force (qui caractérise « l'efficacité » pour le mouvement de rotation de M autour de Az) est donc le produit du module de la force par le bras de levier (distance à l'axe).

II.2. Forces à distance / Forces de contact.

- Forces à distance : ce sont des forces de « champ ». Elles sont du type :

$$\vec{F} = \alpha \vec{G}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ grandeur caractéristique du point M} \\ \vec{G} \text{ champ créant la force} \end{array} \right.$$

Ex. : $\vec{F} = m\vec{g}, \vec{F} = q\vec{E} \dots$

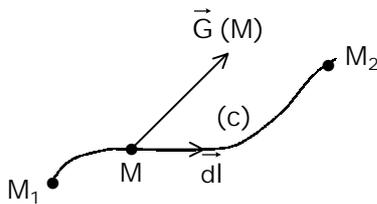
- Forces de contact : ce sont les forces de liaison, pour un point M « lié » (tension d'un fil, réaction d'un support).

II.3. Forces de champ dérivant d'une énergie potentielle :

- On dit que le champ \vec{G} dérive d'un potentiel V si :

$$\vec{G} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$$

Alors :



$$\int_{M_1}^{M_2} (c) \vec{G} \cdot d\vec{l} = V(M_1) - V(M_2)$$

est indépendante du chemin suivi (c) pour aller de M_1 à M_2 .

Et : $\oint \vec{G} \cdot d\vec{l} = 0$ sur un chemin fermé.

On dit aussi que \vec{G} est à circulation conservative.

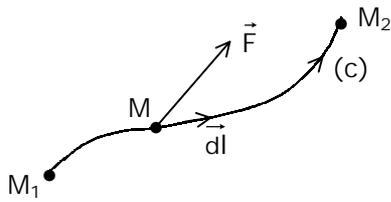
- Si \vec{G} dérive du potentiel V, alors :

$$\vec{F} = \alpha \vec{G} = - \overrightarrow{\text{grad}} (\alpha V) \quad (\alpha = \text{cste})$$

On dit alors que \vec{F} dérive d'une énergie potentielle $E_p = \alpha V$ (E_p en Joules) :

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

On aura de même :



$$\int_{M_1}^{M_2} (c) \vec{F} \cdot d\vec{l} = E_{P_1} - E_{P_2} \quad \text{ne dépend pas du}$$

chemin suivi pour aller de M_1 à M_2 .

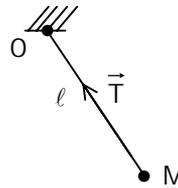
Rem. : • La circulation de \vec{F} de M_1 à M_2 représente le travail de la force \vec{F} (cf IV).

- Une force dérivant d'une énergie potentielle sera aussi appelée force « conservative » (cf IV).

II.4. Forces de liaison.

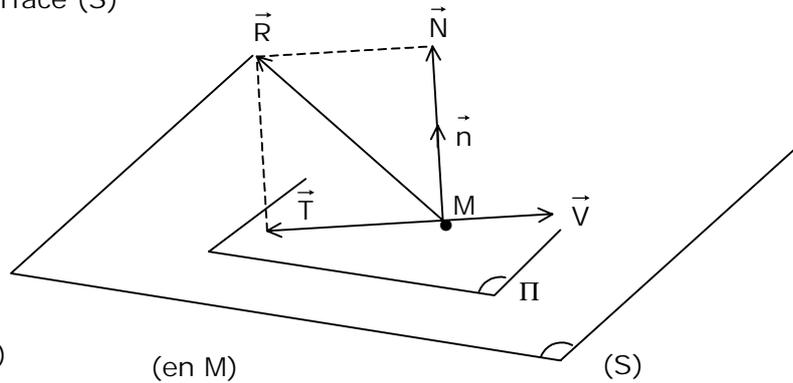
- Tension d'un fil

$$\vec{T} = T \frac{\vec{MO}}{\ell}$$



- Réaction d'un support : lois de Coulomb pour le frottement de glissement.

1^{er} cas : Point lié à une surface (S)



$$\begin{cases} \vec{n} : \text{normale à } (S) \\ (\Pi) : \text{plan tangent à } (S) \end{cases} \quad (\text{en } M)$$

Soit \vec{V} (M/S) vitesse de M par rapport au support (S) ; M est soumis de la part de (S) à une réaction \vec{R} telle que :

$$\vec{R} = \vec{T} + N\vec{n}$$

$$\begin{cases} \vec{T} // (\Pi) \text{ réaction tangentielle, ou force de frottement} \\ \vec{N} = N\vec{n} \quad (N > 0) \text{ réaction normale} \end{cases}$$

- Si $\vec{V} = \vec{0}$ (Non glissement) :

$$\|\vec{T}\| < f_s N$$

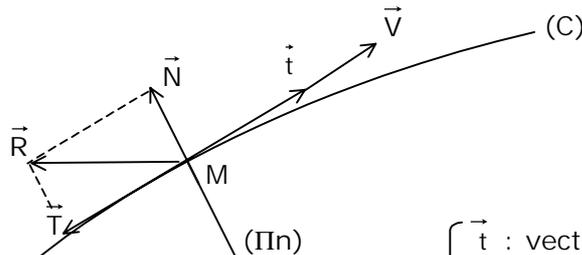
f_s : coefficient de frottement (solide) statique.

- Si $\vec{V} \neq \vec{O}$ (Glissement de M sur (S)) :

$$\begin{cases} \vec{T} = -\lambda \vec{V} & , \quad \lambda > 0 \\ \|\vec{T}\| = f_d N \end{cases}$$

f_d coefficient de frottement dynamique.

2^e cas : Point lié à une courbe (C)



$$\vec{V} = v \vec{t}$$

Cette fois : $\vec{R} = T \vec{t} + \vec{N}$

\vec{t} : vecteur tangent unitaire à (C) en M
 (Π_n) : plan normal à (C) en M

Avec :

$$\begin{cases} T < f_s N \\ T \cdot V < 0 \\ \|\vec{T}\| = f_d N \end{cases}$$

si $\vec{V} = \vec{O}$
 si $\vec{V} \neq \vec{O}$

En général, on confond f_d avec f_s : $f_d \approx f_s = f$

Pour une liaison sans frottement (parfaite) :

$$\begin{cases} f = 0 \\ \vec{R} = \vec{N} \end{cases}$$

III. Relation fondamentale de la dynamique (RFD) en référentiel galiléen.

Soit $\Sigma \vec{F}$ la somme de toutes les forces exercées sur un point matériel M dans un référentiel galiléen (R).

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) postule que $\Sigma \vec{F}$ est liée à l'accélération du point M par la relation (RFD) :

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}(M/R) = m \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}$$

Dans cette expression, m est la « masse d'inertie » du point matériel M.

(En mécanique classique et relativiste, cette masse est confondue avec la masse de gravitation M , qui intervient dans la loi de Newton).

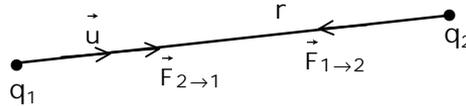
IV. Principe des actions réciproques.

Soient deux points M_1 et M_2 en interaction, $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ la force exercée par M_1 sur M_2 , et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ la force exercée par M_2 sur M_1 .

Alors :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = - \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

Ex. : loi de Coulomb



$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u} = - \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

V. Conséquences de la RFD.

V.1. Point matériel isolé.

Pour un tel point :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow m \vec{V} = \vec{P} = \text{cste}$$

$\vec{P} = m \vec{V}$ est la quantité de mouvement (ou résultante cinétique) du point matériel M (en kgms^{-1}).

Dans un référentiel galiléen, il y a donc conservation de la quantité de mouvement d'un point matériel isolé.

(Ce point sera alors en TRU, et on retrouve le principe d'inertie).

V.2. Théorème du moment cinétique (TMC).

- Moment cinétique d'un point matériel

Par définition, le moment cinétique en A d'un point M de vitesse \vec{V} dans un référentiel (R) est :

$$\vec{\sigma}(A) = \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{V} \quad (\text{en } \text{kgm}^2\text{s}^{-1})$$

- TMC en un point O fixe de (R) galiléen

Si O est fixe dans (R) :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} &= \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OM} \wedge m \vec{V}) \\ &= \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{0}} \wedge m \vec{V} \wedge \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\frac{m d\vec{V}}{dt}}_{\Sigma \vec{F}} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \Sigma \vec{F} = \vec{m}^t(O) (\Sigma \vec{F})$$

- Pour un système isolé : $\vec{\sigma}(O) = \overline{cste}$.

V.3. Equilibre et stabilité.

- CNS d'équilibre : un point matériel M est en équilibre dans un référentiel galiléen ssi :

$$\boxed{\begin{cases} \Sigma \vec{F} = \vec{0} \\ \text{et} \\ \vec{V}_0 = \vec{0} \end{cases}} \quad (\vec{V}_0 \text{ vitesse initiale})$$

En effet :

$$\begin{cases} \Sigma \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{V}_0 = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} = \frac{d\vec{V}}{dt} \\ \vec{V}_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{V} = \overline{cste} = \vec{0}, \forall t$$

- Stabilité : une position d'équilibre est stable si, légèrement déplacé de cette position, le point matériel y revient spontanément (en oscillant autour de cette position).
Pour un point matériel à 1 degré de liberté α , l'application de la RFD conduit à une équation différentielle du 2^e ordre en α , de la forme :

$$\boxed{\overset{\infty}{\alpha} = f(\alpha)}$$

Les positions d'équilibre sont donc caractérisées par $f(\alpha_0) = 0$.

Pour étudier leur stabilité, on pose :

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll \alpha_0$$

(ε « petit déplacement » par rapport à la position d'équilibre α_0).

Alors :

$$\begin{cases} f(\alpha) \approx \underbrace{f(\alpha_0)}_0 + \underbrace{(\alpha - \alpha_0)}_{\varepsilon} f'(\alpha_0) \\ \overset{\infty}{\alpha} = \overset{\infty}{\varepsilon} \end{cases}$$

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire en ε :

$$\boxed{\overset{\infty}{\varepsilon} - f'(\alpha_0) \varepsilon = 0}$$

- Si $f'(\alpha_0) > 0$: on pose $\omega^2 = f'(\alpha_0)$

Alors
$$\varepsilon = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \rightarrow +\infty$$

$$t \rightarrow +\infty$$

La position d'équilibre est instable.

- Si $f'(\alpha_0) = 0$
$$\varepsilon = A + Bt \rightarrow +\infty$$

$$t \rightarrow +\infty$$

La position est également instable.

- Si $f'(\alpha_0) < 0$: on pose $\omega^2 = -f'(\alpha_0)$

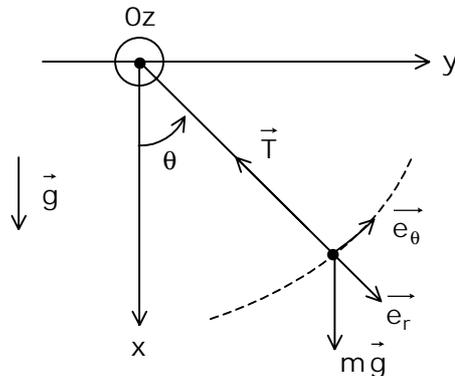
Alors : $\varepsilon = A \cos(\omega t + \varphi)$

Le point M oscille donc à la pulsation ω autour de la position d'équilibre α_0 , qui est alors stable. Une CNS de stabilité est donc :

$$f'(\alpha_0) < 0$$

VI. Quelques exemples d'application :

VI.1. Pendule simple : un point matériel M, suspendu à un fil inextensible, est susceptible d'osciller dans un plan vertical autour d'un axe horizontal Oz :



Dans le référentiel terrestre, supposé ici galiléen, la RFD s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$

Projetons cette relation sur la base de projection « mobile » $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$\begin{cases} -T + mg\sin\theta = -ml\ddot{\theta} & (1) \\ -mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) est l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

Ou encore :

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta = f(\theta) \quad , \quad \text{si } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Les positions d'équilibre correspondent à :

$$f(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \quad \text{ou } \pi$$

* $f'(\Pi) = +\omega_0^2 > 0$: $\theta = \Pi$ est instable, ce qui est physiquement évident.

* $f'(0) = -\omega_0^2 < 0$: $\theta = 0$ est stable.

Au voisinage de $\theta = 0$, $\sin\theta \approx \theta$, et l'équation du mouvement est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 :

$$\overset{\circ\circ}{\ddot{\theta}} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\theta = A \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

(A et φ dépendant des conditions initiales).

Rem. :

☞ On peut aussi obtenir l'équation du mouvement par le TMC en O fixe :

$$\vec{\sigma}(O) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = ml^2 \overset{\circ}{\ddot{\theta}} \vec{z}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = ml^2 \overset{\circ\circ}{\ddot{\theta}} \vec{z}$$

$$\vec{OM} \wedge \Sigma \vec{F} = \vec{OM} \wedge (\vec{T} + \vec{mg}) = \vec{OM} \wedge \vec{mg} = -mgl \sin\theta \vec{z}$$

Donc : $\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{OM} \wedge \Sigma \vec{F} \Rightarrow ml^2 \overset{\circ\circ}{\ddot{\theta}} = -mgl \sin\theta$

☞ L'équation (1) permet d'obtenir la tension T du fil :

$$T = mg \sin\theta + ml \overset{\circ^2}{\dot{\theta}^2}$$

Or : $\overset{\circ\circ}{\ddot{\theta}} = -\omega_0^2 \sin\theta$

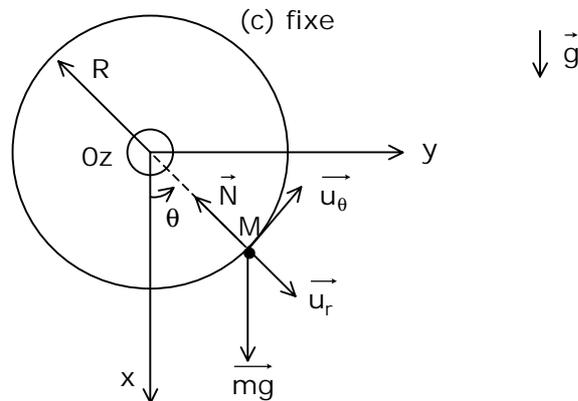
$$\Rightarrow \overset{\circ}{\dot{\theta}} \overset{\circ\circ}{\ddot{\theta}} = -\omega_0^2 \overset{\circ}{\dot{\theta}} \sin\theta, \quad \text{ce qui s'intègre en :}$$

$$\frac{1}{2} \overset{\circ^2}{\dot{\theta}^2} = \omega_0^2 (\cos\theta - \cos\theta_M) \quad (\text{en prenant } \theta = \theta_M \text{ et } \overset{\circ}{\dot{\theta}} = 0 \text{ à } t = 0)$$

Ainsi : $T = mg \sin\theta + 2ml\omega_0^2 (\cos\theta - \cos\theta_M)$

Soit : $T = mg (\sin\theta + 2\cos\theta - 2\cos\theta_M)$

VI.2. Point lié sans frottement à un cerceau :



$$A \quad t = 0 : \begin{cases} \theta = 0 \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{R} \end{cases}$$

Comme précédemment, on applique la RFD au point M, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, et on projette sur la base « mobile » $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta & (1) \\ mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta & (2) \end{cases}$$

(2) s'intègre en :

$$\frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2) = \omega_0^2 (\cos \theta - 1) \quad , \quad \text{si } \omega_0^2 = \frac{g}{R}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 - 2\omega_0^2 (1 - \cos \theta)}} \quad (3)$$

- Supposons a priori qu'il n'y a jamais décollement : le mouvement peut alors être oscillatoire ou révolutif.

Il est révolutif si $\theta = \Pi$ peut être atteint.

$$\text{Or :} \quad \dot{\theta}^2(\Pi) = \dot{\theta}_0^2 - 4\omega_0^2$$

1^{er} cas : $\dot{\theta}_0 > 2\omega_0$: le mouvement est révolutif.

2^e cas : $\dot{\theta}_0 = 2\omega_0$ (cas limite mathématique)

$$\text{Alors :} \quad \dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 (1 + \cos \theta) = 4\omega_0^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = 2\omega_0 \cos \frac{\theta}{2} = \frac{d\theta}{dt} \quad (\theta \in [0, \Pi])$$

On peut intégrer en séparant les variables :

$$\frac{d\theta}{2 \cos \theta/2} = \omega_0 dt$$

$$\Rightarrow \int_{\theta=0}^{\theta} \frac{d(\theta/2)}{\cos \theta/2} = \omega_0 t$$

Soit :

$$\boxed{\ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right] = \omega_0 t}$$

Dans ce cas : $\begin{cases} t \rightarrow +\infty \\ \theta \rightarrow 0 \end{cases}$ si $\theta \rightarrow \pi$: le point M arrive en $\theta = \pi$ au bout d'un

temps « infini », avec une vitesse nulle.

3^e cas : $\theta_0 < 2 \omega_0$: le mouvement est alors oscillatoire, entre $\pm \theta_M$ tel que :

$$1 - \cos \theta_M = \frac{\theta_0^2}{2 \omega_0^2} = 2 \sin^2 \frac{\theta_M}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\theta_M}{2} = \frac{\theta_0}{2 \omega_0}$$

On peut alors réécrire (3) sous la forme :

$$\theta^2 = 2 \omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_M)$$

• Si $\theta_M \ll 1$ ($\theta_0 \ll 2 \omega_0$) : $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, et :

$$\theta^2 + \omega_0^2 \theta^2 = cste \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

L'oscillation est alors harmonique.

• Sinon, l'oscillation est périodique non sinusoidale.
Nous verrons en V comment calculer la période.

☞ Etude du décollement : le point M « décolle » lorsque N s'annule.

Or : (1) donne $N = mR \theta^2 + mg \cos \theta$

Soit, compte-tenu de (3) :

$$N = mR \theta_0^2 + mg (3 \cos \theta - 2)$$

Donc $N = 0$ pour $\theta = \theta_d$ tel que :

$$\cos \theta_d = \frac{1}{3} \left[2 - \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

Il faut discuter l'existence de θ_d :

$$-1 \leq \cos \theta_d \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right)^2 \leq 5$$

1^{er} cas : $\dot{\theta}_0 > \sqrt{5} \omega_0$: le mouvement est révolutif et M ne décolle pas.

2^e cas : $2 \omega_0 < \dot{\theta}_0 < \sqrt{5} \omega_0$: le mouvement : « serait » révolutif mais M va décoller avant d'atteindre $\theta = \Pi$ (la vitesse initiale est trop faible).

3^e cas : $\dot{\theta}_0 < 2 \omega_0$: le mouvement est oscillatoire, et a priori, θ_d existe ; mais il faut placer alors θ_d par rapport à θ_M .

Il n'y aura décollément que si $\theta_d < \theta_M$.

Or : $\theta_d < \theta_M \Leftrightarrow \cos \theta_d > \cos \theta_M$

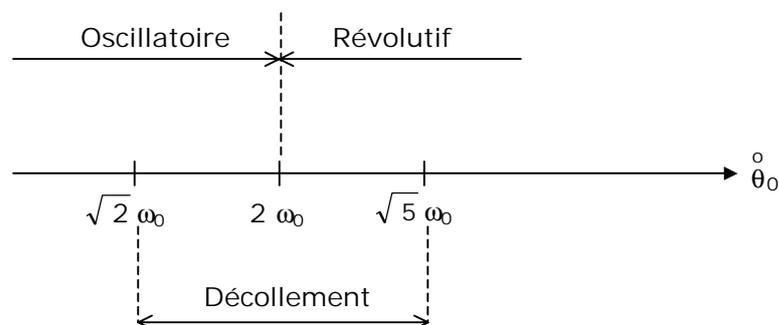
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \left[2 - \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right)^2 \right] > 1 - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2 \omega_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}_0 > \sqrt{2} \omega_0$$

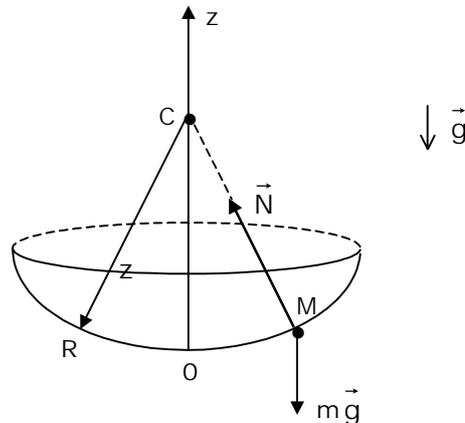
$$\Leftrightarrow \theta_M > \Pi/2$$

Il n'y aura donc décollément que si $\theta_M > \Pi/2$, ce qui paraît évident physiquement.

On peut donc résumer les résultats obtenus selon la valeur $\dot{\theta}_0$:



VI.3. Mouvement sans frottement au fond d'une calotte sphérique.



Appliquons le théorème du moment cinétique en C fixe :

$$\frac{d\vec{\sigma}(C)}{dt} = \overline{CM} \wedge (\vec{N} + m\vec{g}) = \overline{CM} \wedge m\vec{g}$$

Avec :

$$\vec{\sigma}(M) = \overline{CM} \wedge m\vec{v}$$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z - R \end{vmatrix} \wedge m \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$\overline{CM} \wedge m\vec{g} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z - R \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix}$$

On obtient par projection sur $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [y\dot{z} - \dot{z}(z - R)] = -gy & (1) \\ \frac{d}{dt} [-x\dot{z} + \dot{z}(z - R)] = +gx & (2) \\ \frac{d}{dt} [x\dot{y} - y\dot{x}] = 0 & (3) \end{cases}$$

Au « fond » de la calotte : $z, \dot{z} \approx 0$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x \approx 0 & (2) \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y \approx 0 & (1) \\ x\dot{y} - y\dot{x} \approx 0 & (3) \end{cases} \quad \left(\omega_0^2 = \frac{g}{R} \right)$$

$$\text{On en déduit : } \begin{cases} x(t) \approx A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ y(t) \approx B \cos(\omega_0 t + \psi) \end{cases}$$



La trajectoire projetée sur le plan Oxy est donc une ellipse de centre O .

Rem. : l'équation (3) s'écrit aussi :

$$r^2 \dot{\theta} = C, \text{ en coordonnées cylindriques (} x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{)}$$

Nous avons vu en II qu'il s'agit de la loi des aires : l'ellipse de centre O est décrite selon la loi des aires.